## **АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫПОЛНЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ИЛИ ГРУПП ЗАДАНИЙ**

### Краткая характеристика КИМ по учебному предмету

**Профильный уровень**

Структура и содержание КИМ по математике сохраняется в течение несколько последних лет.

Выпускникам, освоившим основные образовательные программы среднего общего образования, предложено для выполнения 19 заданий, экзаменационная работа состоит из двух частей, которые различаются по содержанию, сложности и числу заданий:

– часть 1 содержит 8 заданий (задания 1–8) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби;

– часть 2 содержит 4 задания (задания 9–12) с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби и 7 заданий (задания 13–19) с развернутым ответом (полная запись решения с обоснованием выполненных действий).

Задания части 1 направлены на проверку освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях.

Посредством заданий части 2 осуществляется проверка освоения математики на профильном уровне, необходимом для применения математики в профессиональной деятельности.

По уровню сложности задания распределяются следующим образом:

задания 1–8 имеют базовый уровень;

задания 9–17 – повышенный уровень;

задания 18 и 19 относятся к высокому уровню сложности.

Задания части 1 предназначены для определения математических компетентностей выпускников образовательных организаций, реализующих программы среднего (полного) общего образования на базовом уровне.

Задание с кратким ответом (1–12) считается выполненным, если в бланке ответов № 1 зафиксирован верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Максимальный первичный балл за выполнение заданий с кратким ответом – 12 (по 1 баллу – за каждое задание).

Задания 13–19 с развернутым ответом, в числе которых 5 заданий повышенного и 2 задания высокого уровней сложности, предназначены для более точной дифференциации абитуриентов вузов.

При выполнении заданий с развернутым ответом части 2 экзаменационной работы в бланке ответов №2 должны быть записаны полное обоснованное решение и ответ для каждой задачи. Максимальный первичный балл за выполнение заданий с развернутым ответом – 20 (по 2 балла – за задание 13–15, по 3 балла – за задания 16, 17, по 4 балла – за задания 18, 19).

Проверка выполнения заданий 13 – 19 проводится экспертами на основе специально разработанной системы критериев.

Задания делятся на три тематических модуля «Алгебра и начала анализа», «Геометрия» и «Практико-ориентированные задания».

Задания 1, 2 и 4 первой части и задания 10 и 17 второй части представляли практико-ориентированный модуль, включая задание на элементы курса теории вероятностей.

Задания 3, 6, 8 первой части, задания 14 и 16 второй части – геометрические.

Задания 5, 7 первой части и задания 9, 11, 12, 13, 15, 18 и 19 второй части – это задания разного уровня сложности по алгебре, включая задания на составление математических моделей в виде уравнений или неравенств, а также задания по элементам математического анализа, призванные проверить базовые понятия анализа и умение применять стандартные алгоритмы при решении задач.

### Анализ выполнения заданий КИМ

### Статистический анализ выполнения заданий КИМ

**Профильный уровень**

Содержание и структура экзаменационной работы дают возможность проверить комплекс умений по предмету:

уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни (4 задания);

уметь выполнять вычисления и преобразования (1 задание);

уметь решать уравнения и неравенства (4 задания);

уметь выполнять действия с функциями (2 задания);

уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами (5 заданий);

уметь строить и исследовать математические модели (3 задания).

Таблица 2‑13

| Номер  задания в КИМ | Проверяемые элементы содержания / умения | Уровень сложности задания | Процент выполнения задания  в субъекте Российской Федерации[[1]](#footnote-1) | | | | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| средний | в группе не преодолевших минимальный балл | в группе от минимального до 60 т.б. | в группе от 61 до 80 т.б. | в группе от 81 до 100 т.б. |
| 1 | Целые числа. Дроби, проценты, рациональные числа. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений./ *Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни* | Б | 94,56 | 71,22 | 95,03 | 98,75 | 100,00 |
| 2 | Определение и график функции. Элементарное исследование функций. Основные элементарные функции. Табличное и графическое представление данных./ *Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни* | Б | 98,71 | 92,45 | 99,26 | 99,28 | 99,45 |
| 3 | Планиметрия.  Измерение геометрических величин./ *Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами* | Б | 92,49 | 46,76 | 94,40 | 99,64 | 100,00 |
| 4 | Элементы теории вероятностей./ *Уметь строить и исследовать простейшие математические модели* | Б | 92,94 | 51,08 | 94,80 | 99,28 | 100,00 |
| 5 | Уравнения./ *Уметь решать уравнения* | Б | 94,41 | 56,12 | 96,86 | 99,28 | 99,45 |
| 6 | Треугольник. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат. Трапеция. Окружность и круг. Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности. Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями. Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника. Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми, расстояние между параллельными плоскостями. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора./ *Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами* | Б | 79,74 | 23,02 | 78,00 | 93,83 | 96,69 |
| 7 | Производная. Исследование функций. Первообразная и интеграл./ *Уметь выполнять действия с функциями* | Б | 37,00 | 8,99 | 22,51 | 58,32 | 88,40 |
| 8 | Прямые и плоскости в пространстве. Многогранники. Тела и поверхности вращения. Измерение геометрических величин./ *Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами* | Б | 57,32 | 5,04 | 43,60 | 85,60 | 95,58 |
| 9 | Числа, корни и степени. Основы тригонометрии. Логарифмы. Преобразование выражений./ *Уметь выполнять вычисления и преобразования* | П | 52,75 | 6,47 | 34,97 | 84,79 | 97,79 |
| 10 | Уравнения. Неравенства./ *Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни* | П | 81,03 | 10,07 | 81,31 | 95,53 | 97,79 |
| 11 | Уравнения. Неравенства./ *Уметь строить и исследовать простейшие математические модели* | П | 50,14 | 3,24 | 34,40 | 79,16 | 95,03 |
| 12 | Производная. Исследование функций./ *Уметь выполнять действия с функциями* | П | 61,68 | 5,04 | 49,71 | 89,00 | 95,58 |
| 13 | Уравнения. Неравенства./ *Уметь решать уравнения* | П | 32,60 | 0 | 6,77 | 70,53 | 98,07 |
| 14 | Прямая и плоскость в пространстве. Многогранники. Тела и поверхности вращения. Измерение геометрических величин.  Координаты и векторы./ *Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами* | П | 2,61 | 0,18 | 0,29 | 2,86 | 27,35 |
| 15 | Уравнения. Неравенства./ *Уметь решать уравнения и неравенства* | П | 16,01 | 0 | 1,34 | 30,55 | 92,54 |
| 16 | Планиметрия./ *Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами* | П | 3,37 | 0 | 0,40 | 4,35 | 31,12 |
| 17 | Целые числа. Дроби, проценты, рациональные числа. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений./ *Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни* | П | 19,04 | 0 | 1,45 | 38,79 | 96,32 |
| 18 | Уравнения. Неравенства. Элементарное исследование функций. Основные элементарные функции./ *Уметь решать уравнения и неравенства* | В | 1,22 | 0 | 0,03 | 0,92 | 16,57 |
| 19 | Числа, корни и степени. Основы тригонометрии. Логарифмы. Преобразование выражений./ *Уметь строить и исследовать простейшие математические модели* | В | 7,52 | 0,72 | 3,94 | 11,92 | 25,41 |

*Уровни сложности заданий: Б – базовый; П – повышенный; В – высокий.*

### Содержательный анализ выполнения заданий КИМ

**Анализ результатов выполнения отдельных заданий по математике профильного уровня**

Средний первичный балл в 2021 г. – 10,94 (в 2020 г. – 11,04). Средний тестовый балл – 51,97 (в 2020 г. – 52,56).

Так же, как и предыдущие годы задания с кратким ответом выполнялись значительно лучше заданий с развернутым ответом.

Высокие показатели успешности продемонстрированы участниками при решении заданий с кратким ответом №№ 1–6, 8–12 – выше 50%. В 2021 году у многих школьников затруднения вызвало задание №7, 37,00% – процент выполнения.

Указанные задания проверяли умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни; выполнять действия с геометрическими фигурами; исследовать простейшие математические модели; решать уравнения. Задания этого блока включали в себя следующее предметное содержание: действия с целыми числами; табличное и графическое представление данных – чтение диаграмм и применение математических методов для решения содержательных задач из практики; вычисление площади треугольника, параллелограмма, трапеции; вычисление вероятности события, решение простейших уравнений.

В основном, у участников экзамена сформированы базовые математические компетенции за курс математики основной и средней общеобразовательной школы. Набранные первичные баллы за правильное выполнение этих заданий, позволяет преодолеть минимальный порог баллов по профильной математике (27 баллов).

Успешность выполнения заданий базового уровня сложности (с 1 по 8 задания) составляет 37,00% – 98,71%. Возникшие в 2021 году проблемы с заданием 7 объясняют невысокое нижнее значение – 37,00%. Многие из участников экзамена не имеют достаточного представления о геометрическом смысле производной. По сравнению с 2020 годом отмечается существенный регресс при выполнении задания 7 (в 2020 – 71,03%). Лучше решали задание 1 (выполнение в 2021 – 94,56%, в 2020 – 83,32%) и хуже, чем в 2020, – задание 6 (2021 – 79,74%, в 2020 – 85,25%). В остальных заданиях базового уровня сложности проценты выполнения изменились незначительно.

Успешность выполнения заданий повышенного уровня сложности с кратким ответом составляет 50,14% – 81,03%. По сравнению с 2020 годом отмечается снижение этого показателя по заданиям 9, 11 и повышение по заданиям 10 и 12 (средний процент выполнения этих заданий в 2020 – 44,79% – 75,20%).

Отмечается снижение показателей по №№9,11:

Задание 9. Выполнение – 52,75% (в 2020 – 55,79%). Трудности вызывают задания, содержащие тригонометрические выражения.

Задание 11. Выполнение – 50,14% (в 2020 – 66,43%). Задача на работу является стандартной задачей на составление уравнений из курса алгебры. В 2020 году участники экзамена лучше справились с задачей на движение. Можно предположить, что в 2020 году речь шла о более простой задаче, в которой экзаменуемый без особых проблем получал необходимое уравнение.

Отмечается повышение показателей по №№10, 12:

Задание 10. Выполнение – 81,03% (в 2020 – 75,20%). Задача требовала внимательного и вдумчивого прочтения и аккуратного решения полученного неравенства.

Задание 12. Выполнение – 61,68% (в 2020 – 47,79%). Задание на понимание геометрического смысла производной и исследование функций с помощью производной выполняет больше половины участников профильного экзамена.

Среди заданий с кратким ответом наибольшие трудности вызвали задания 6, 7 и 11.

Успешность выполнений заданий с кратким ответом свидетельствует о том, что выпускники 2021 года овладели программой по математике основной и старшей школы на уровне достаточном для продолжения обучения в высших профессиональных учебных заведениях.

К повышенному уровню относятся задания с развёрнутым ответом по алгебре:

– №13 – алгебраическое уравнение с отбором корней. Выполнение – 32,60% (в 2020 г. – 28,76%). В решении задания 13 традиционно допускаются одни и те же типичные для этой задачи ошибки: неверное применение тригонометрических формул, неверная запись общего решения простейшего тригонометрического уравнения, неверный (необоснованный) отбор корней тригонометрического уравнения, принадлежащих указанному отрезку.

Учителю необходимо обратить внимание школьника на оформление пункта б). Нередко просматривается верная идея в решении, но решение не принимается, как не отвечающее критериям оценивания.

– №15 – неравенство. Выполнение – 16,01% (в 2020 г. – 12,71%). Типичная ошибка в решении: ученик, выполнив замену переменного, получает квадратное неравенство и, не решив данного неравенства до конца, делает обратную замену (и/или отбор корней) на этапе нахождения вспомогательного квадратного уравнения. Кроме того, многие школьники так и не научились корректно решать рациональные неравенства методом интервалов. Также, вероятно, имеются очень приблизительные представления об обобщённом методе интервалов и грамотном оформлении решения этим методом.

– №17 – задача с экономическим содержанием. Выполнение – 19,04% (в 2020 г. – 24,76%). Задача стандартная, известная школьникам уже несколько лет. С одной стороны, задача 2021 года проще задачи 2020 года: нет необходимости выполнять преобразования в общем виде (возможна работа с конкретными числовыми значениями), с другой стороны, ровно эти же обстоятельства могли сыграть злую шутку, поскольку неверные вычисления приводили к неверной математической модели.

Задания по геометрии №14 (стереометрия) и №16 (планиметрия), а также задания №18 (задача с параметром) и №19 – задания повышенного и высокого уровня сложности с наименьшими процентами выполнения (с процентом выполнения ниже 15%):

– №14. Выполнение – 2,61% (в 2020 г. – 2,89%). Участники экзамена часто утверждения, требующие обоснования, прописывали как очевидные, что приводило к потере баллов за задание.

– №16. Выполнение – 3,37% (в 2020 г. – 1,1%). В сравнении с 2020 годом показатели выполнения задания выросли примерно в 3 раза. Связать это можно с лучшей подготовкой выпускников, ориентированных на продолжение обучения на физико-математических, естественно-научных технических направлениях вузов. При этом стереометрическую задачу (как, впрочем, и планиметрическую) из года в год решают плохо. Можно сделать вывод о том, что лишь незначительный процент школьников усваивает материал по геометрии на хорошем уровне.

Рекомендации: продолжить попытки научить школьника решению задач и доказательству утверждений, подчёркивая мысль об аксиоматическом построении курса геометрии, а, значит, необходимости проведения доказательств всех тех утверждений, которых нет среди аксиом, постулатов, определений или которые не доказывались ранее (теоремы, следствия и пр.).

– №18. Выполнение – 1,22% (в 2020 г. – 2,15%). В сравнении с 2020 годом показатели выполнения задания снизились более, чем в 1,5 раза. Многие неверные решения содержали неточные рассуждения, связанные с областью допустимых значений подкоренного выражения.

– №19. Выполнение – 7,52% (в 2020 г. – 2,07%). В сравнении с 2020 годом показатели выполнения задания выросли более, чем в 3,5 раза. Успешность выполнения можно связать с лучшей подготовкой выпускников, ориентированных на продолжение обучения на физико-математических, естественно-научных технических направлениях вузов.

**ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ**

Для содержательного анализа используется один вариант КИМ, из числа выполнявшихся в Тверском регионе. Предложенный для содержательного анализа вариант 301 получен в РЦОИ субъекта РФ. Вариант 301 полностью соответствует заявленной спецификации.

Средний процент выполнения каждого задания по всем вариантам и по конкретному 301 варианту значительно расходится в заданиях 7, 8, 14, 16, 18 (более, чем в 1,1 раз):

| Номер  задания в КИМ | Уровень сложности задания | Процент выполнения задания  в субъекте Российской Федерации | |
| --- | --- | --- | --- |
| Средний  по всем вариантам | Средний  по варианту  301 |
| 7 | Б | 37,00 | 31,99 |
| 8 | Б | 57,32 | 51,84 |
| 14 | П | 2,61 | 3,86 |
| 16 | П | 3,37 | 2,08 |
| 18 | В | 1,22 | 0,92 |

Для содержательного анализа использовались тексты соответствующих прототипов заданий из открытого банка заданий ЕГЭ (<http://os.fipi.ru/tasks/2/a> – Математика профильная, <http://os.fipi.ru/tasks/22/a> – Математика базовая). Номера прототипов заданий с кратким ответом указаны в скобках.

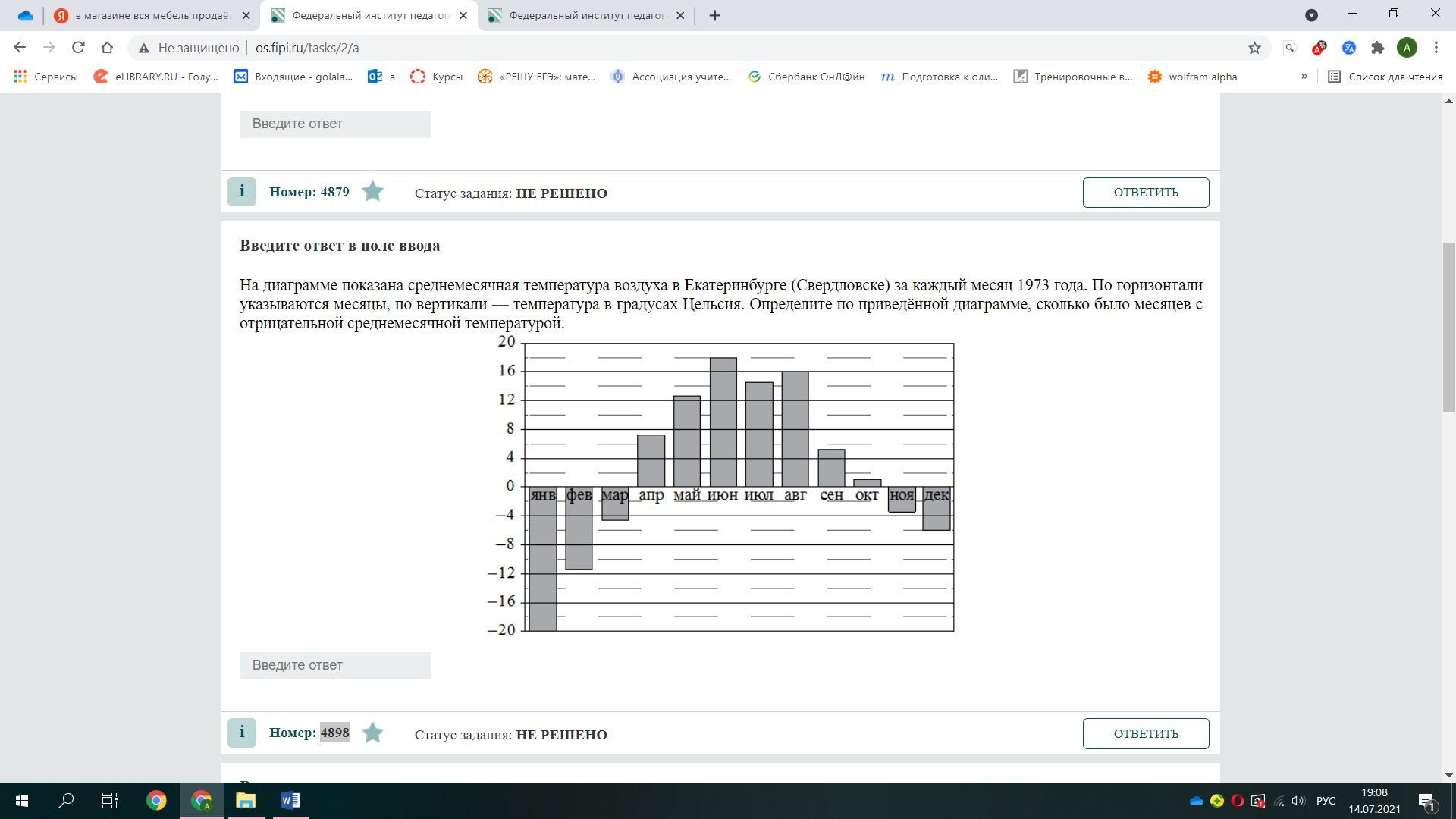
**Практико-ориентированные задания базового уровня**

Для заданий базового уровня первой части (1, 2, 4), проверяющих умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, строить и исследовать простейшие математические модели, уровень усвоения достигнут (свыше 92%). Практико-ориентированные задачи не являются для участников неожиданными, задания такого типа они решали при сдаче основного государственного экзамена в 9 классе. Умение решать задания этого модуля являлось обязательным для прохождения аттестационного рубежа в Тверском регионе, поэтому такие задания учащиеся рассматривали на уроках математики основной школы. Задания такого типа также включались в учебный материал при изучении математики в старшей школе.

**Задание 1.** В магазине вся мебель продаётся в разобранном виде. Покупатель может заказать сборку мебели на дому, стоимость которой составляет 10% от стоимости купленной мебели. Шкаф стоит   
22 000 рублей. Во сколько рублей обойдётся покупка этого шкафа вместе со сборкой? (5030)

Выполнение – 94,56%. Задание решали лучше, чем в 2020 году (в 2020 году – 83,32%). Возможные причины неудачных решений: не усвоено понятие процента и арифметические ошибки. В группе не преодолевших минимальный порог процент выполнения этого задания 71,22%, в группе 81-100 т.б.– 100%.

**Задание 2.** На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по приведённой диаграмме, сколько было месяцев с отрицательной среднемесячной температурой. (4898)



Задание выполнили 98,71% (в 2020 году – 97,42%) участников экзамена. Незначительный процент невыполнивших задание может свидетельствовать о случайных ошибках в толковании условия задачи и неверном прочтении диаграммы.

В группе учащихся, не преодолевших минимальный порог, процент выполнения этого задания 92,45%, в группе 81-100 т.б. выполнение – 99,45%.

**Задание 4.** В сборнике билетов по географии всего 60 билетов, в девяти из них встречается вопрос по теме «Ресурсообеспеченность». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос по теме «Ресурсообеспеченность». (5185)

Успешно справились с этим заданием 92,94%, что ниже соответствующего показателя 2020 года –95,75%. Задание на применение классического определения вероятности события. Стоит отметить, что выпускники региона на протяжении всего периода, когда данное задание было введено в КИМ по математике, показывают стабильно высокий результат (выше 80%).

В группе участников, не преодолевших минимальный порог, процент выполнения этого задания 51,08%, в группе 81-100 т.б. выполнение – 100%.

По результатам выполнения заданий ЕГЭ профильного уровня в 2021 году по математике можно сделать вывод о достаточно высоком уровне подготовки экзаменующихся к заданиям, требующим от учащихся умений использовать приобретенные знания в практической деятельности и исследовать простейшие математические модели. При этом, можно говорить об отсутствии достаточного навыка алгебраических преобразований и вычислений, об отсутствии у многих учащихся навыков самоконтроля и проверки ответа на правдоподобие, о неумении внимательно прочитать задание и ответить на поставленный вопрос. Учащимися допускается большое количество вычислительных ошибок.

**Геометрические задания базового уровня**

Для заданий базового уровня первой части (3, 6, 8), проверяющих умения выполнять действия с геометрическими фигурами по содержанию курсов «Планиметрия» и «Стереометрия», достигнут уровень усвоения выше 57%.

**Задание 3**. На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображена трапеция. Найдите её площадь. (4899)

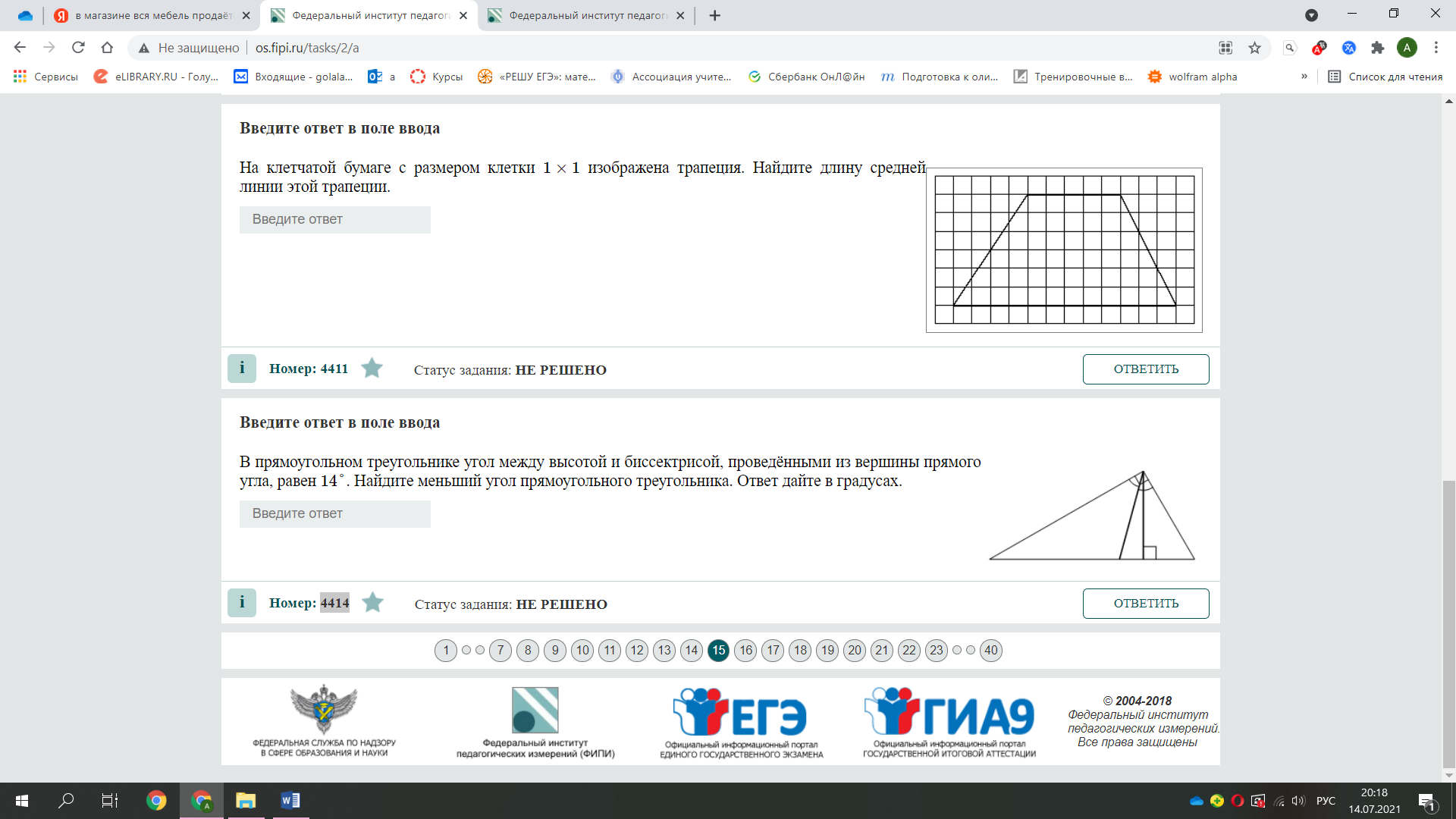
Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Задание выполнили 92,49% участников. В 2020 году соответствующий показатель – 91,59%. Основные ошибки связаны с неверным чтением рисунка.

В группе участников, не преодолевших минимальный порог, процент выполнения этого задания 46,76%, в группе 81-100 т.б. выполнение –100%.

**Задание 6.** В прямоугольном треугольнике угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла, равен 14°. Найдите меньший угол прямоугольного треугольника. Ответ дайте в градусах. (4414)



Справились с этим заданием 79,74% участников (в 2020 году соответствующий показатель – 85,25%). Основной причиной неуспешного выполнения этого задания является незнание свойств геометрических фигур (в данном случае – прямоугольного треугольника) и их основных элементов (высоты, медианы, биссектрисы, проведённых из вершины прямого угла прямоугольного треугольника). В некоторых случаях (редко) – вычислительные ошибки. Следует обратить особое внимание на развитие геометрической интуиции, умение работать с чертежом, узнавать базовые геометрические конструкции.

В группе экзаменуемых, не преодолевших минимальный порог, процент выполнения этого задания 23,02%, в группе 81-100 т.б. выполнение – 96,69%.

**Задание 8.** Конус вписан в шар (см. рисунок). Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 47. Найдите объём шара. (4771)

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Выполнение – 57,32%, это ниже, чем в 2020 году – 57,84%. Решение задачи требует анализа, при котором учитывается взаимное расположение конуса и шара, а также знания формул объёма этих тел.

В группе не преодолевших минимальный порог процент выполнения этого задания 5,04%, в группе 81-100 т.б. выполнение – 95,58%. Низкий процент выполнения заданий по стереометрии вызван существенными проблемами в преподавании стереометрии, зачастую формальному характеру уроков, уклоном в вычислительные задачи, а, в некоторых школах, и существенному перекосу акцентов в сторону алгебры (координатный метод) и начал анализа. В преподавании геометрии очень важным является не только умение решать вычислительные задачи с геометрическим содержанием (по формулам), но и формировать геометрические представления о фигурах (телах).

**Алгебраические задания базового уровня**

Для задания 5 базового уровня первой части, проверяющего умения решать уравнения, выполнение составляет около 94%, а для задания 7 первой части, проверяющего умения выполнять действия с функциями по курсу математики старшей школы – около 37%.

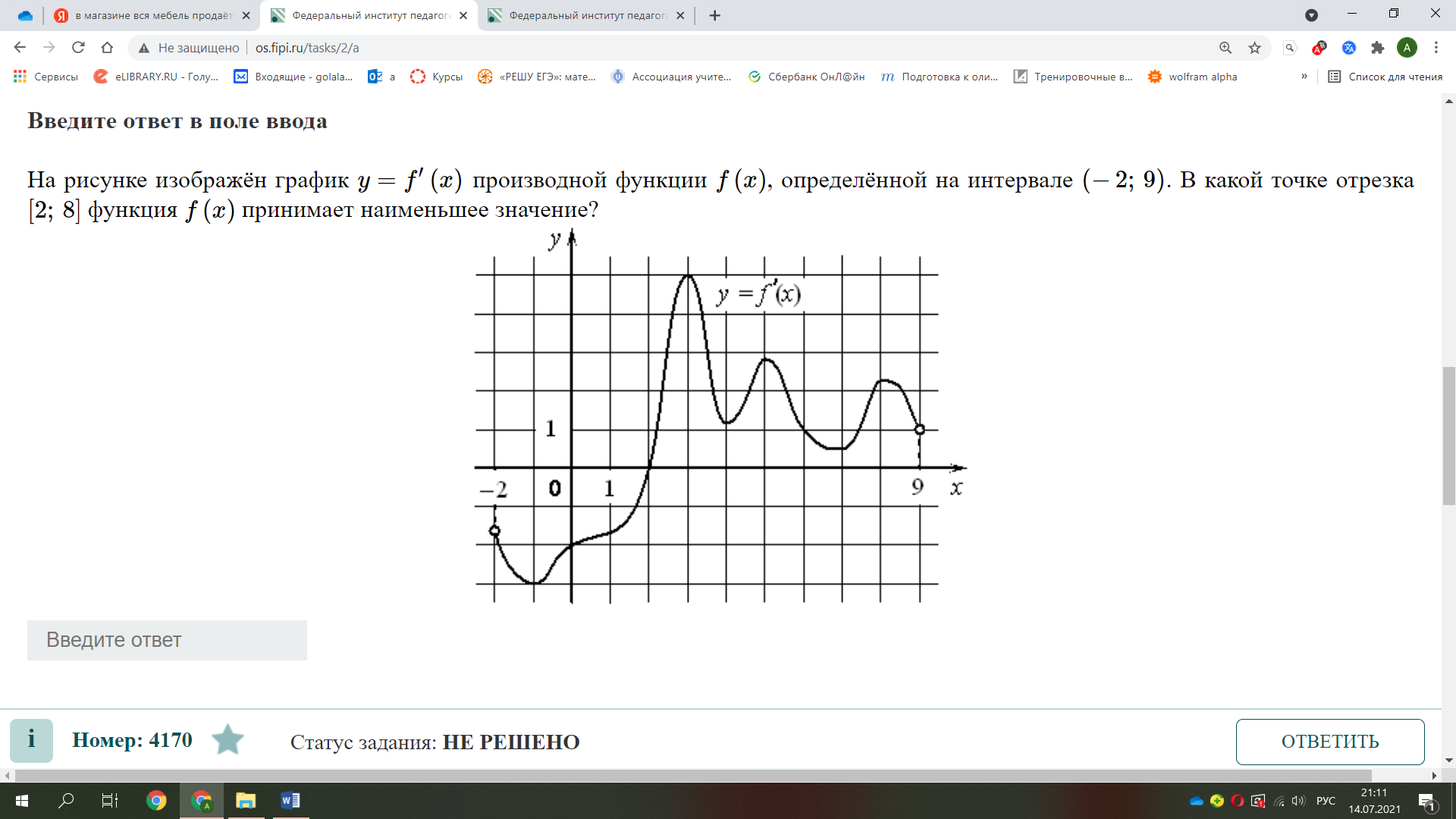
**Задание 5.** Найдите корень уравнения . (4371)

В задании 5 проверялось умение решать простейшие показательные уравнения.

Выполнение – 94,41%, в 2020 году – 96,89%. Неуспешное выполнение задания может быть обусловлено незнанием свойств степени и вычислительными ошибками.

В группе не преодолевших минимальный порог процент выполнения этого задания 56,12%, в группе 81-100 т.б. выполнение – 99,45%.

**Задание 7.** На рисунке изображён график производной функции , определённой на интервале . В какой точке отрезка функция принимает наименьшее значение? (4170)



Выполнение 37,00% – много меньше 2020 года (в 2020 году – 71,03%). Задание проверяет знание и понимание геометрического смысла производной и приложений производной к исследованию функций. Выполняют задание меньше половины участников профильного экзамена.

При изучении основ математического анализа следует смещать акцент с формальных вычислений на геометрический и физический смыслы производной.

В группе не преодолевших минимальный порог процент выполнения этого задания 8,99%, в группе 81-100 т.б. выполнение – 88,40%.

**Практико-ориентированные задания повышенного уровня**

К заданиям повышенного уровня относились задания второй части 10 (с кратким ответом) и 17 (с развернутым ответом). Задания проверяли умения использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

**Задание 10.** В розетку электросети подключена электрическая духовка, сопротивление которой составляет . Параллельно с ней в розетку предполагается подключить электрообогреватель, сопротивление которого (в Ом). При параллельном соединении двух электроприборов с сопротивлениями и их общее сопротивление вычисляется по формуле . Для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 20 Ом. Определите наименьшее возможное сопротивление электрообогревателя. Ответ дайте в омах. (4963)

Выполнение – 81,03%. Этот показатель выше соответствующего показателя предыдущего года (в 2020 году – 75,20%). Наибольшая трудность в заданиях такого типа – корректное прочтение условия задачи. Некоторые участники экзамена не приступают к решению данной задачи.

В группе не преодолевших минимальный порог процент выполнения этого задания 10,07%, в группе 81-100 т.б. выполнение – 97,79%.

**Задание 17.** В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 700 тыс. рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:

* + в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 19% по сравнению с концом предыдущего года;
  + в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
  + с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
  + в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
  + к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

Задание 17 повышенного уровня сложности – задача экономического характера. Это задание, проверяющее практические навыки применения математики в повседневной жизни, навыки построения и исследования математических моделей. Верное, обоснованное решение этого задания оценивается в 3 балла.

Выполнение – 19,04% участников. Показатель ниже, чем в 2020 году (24,76%).

Наибольшие затруднения вызвало построение математической модели (получение суммы выплат) по условию экономической задачи. Некоторое количество выпускников использовали неверную схему выплат (погашение долга равными платежами).

Учителю необходимо добиться от ученика понимания того, что является математической моделью любой текстовой (не обязательно экономической) задачи. Работать над этим можно при решении стандартных задач на движение, работу, концентрацию и др.

В группе участников, не преодолевших минимальный порог, учащиеся в большинстве случаев не приступали к выполнению этого задания, а приступившие неверно составляли математическую модель из-за непонимания схемы выплат, процент выполнения этого задания 0%. В группе 81-100 т.б. процент выполнения – 96,32%. При верной математической модели большинство представителей последней группы решали задачу до конца. Потеря балла происходила только из-за вычислительных ошибок.

**Геометрические задания повышенного уровня**

К заданиям повышенного уровня относились задания второй части 14 (стереометрия) и 16 (планиметрия) с развернутым ответом. Задания проверяли умения выполнять действия с геометрическими фигурами. Оба задания содержали два пункта. В первом пункте задания необходимо что-то доказать, а во втором пункте – вычислить.

**Задание 14.** В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD* сторона основания *AD* равна 14, высота *SH* равна 24. Точка *K* – середина бокового ребра *SD*, а точка *N* – середина ребра *CD.* Плоскость *AKB* пересекает боковое ребро *SC* в точке *P*.

а) Докажите, что прямая *KP* пересекает отрезок *SN* в его середине.

б) Найдите расстояние от точки *P* до плоскости *SAB*.

В задании 14 требовалось, доказать некоторое утверждение и найти заданное расстояние. Обоснованное решение этой задачи оценивается в 2 балла.

Выполнение – 2,61% участников (в 2020 году – 2,89%). К основным недочётам выполнения этого задания в 2021 году следует отнести отсутствие в решении необходимых этапов (ключевые утверждения фиксировались как само собой разумеющиеся и не доказывались) как в пункте а), так и в пункте б), а также арифметические ошибки в пункте б).

В группе учащихся, не преодолевших минимальный порог, многие не приступали к выполнению этого задания, процент выполнения задания – 0,18%. В группе 81-100 т.б. процент выполнения – 27,35%.

В 2021 году затруднения вызвали оба пункта задания, поскольку в их решении могла идти речь о достаточно наглядном, интуитивно понятном факте, при этом согласно критериям оценивания задания 14 («обоснованное решение») каждое такое утверждение нуждалось в строгом доказательстве.

**Задание 16.** Трапеция *ABCD* с большим основанием *AD* и высотой *BH* вписана в окружность. Прямая *BH* вторично пересекает эту окружность в точке *K*.

а) Докажите, что прямые *AC* и *AK* перпендикуляры.

б) Прямые *CK* и *AD* пересекаются в точке *N*. Найдите *AD*, если радиус окружности равен 12, , а площадь четырехугольника *BCNH* в 8 раз больше площади треугольника *KNH*.

Задание 16 – задача из раздела «Планиметрия». Верное, обоснованное решение этого задания оценивается в 3 балла.

Выполнение – 3,37% участников (в 2020 году – 1,10%). В 2021 году это задание выполняли существенно лучше, чем в 2020 году. Связать это можно с лучшей подготовкой выпускников, ориентированных на продолжение обучения на физико-математических, естественно-научных технических направлениях вузов. Тем не менее, низкий процент выполнения задания говорит о недостаточной школьной подготовке по геометрии в среднем звене, так как это задание проверяет уровень знаний и навыков по разделу «Планиметрия», который изучается с 7 по 9 классы. Большинство выпускников не смогли продемонстрировать навыки строгого и логичного доказательства геометрических утверждений, знаний свойств геометрических фигур и формул.

В группе участников, не преодолевших минимальный порог, большинство не приступало к выполнению этого задания, а приступившие не сумели выполнить ни одного из пунктов задания, процент выполнения – 0%. В группе 81-100 т.б. процент выполнения – 31,12%.

**Алгебраические задания повышенного уровня**

К заданиям повышенного уровня относились задания второй части 9, 11, 12 с кратким ответом и задания 13, 15 с развернутым ответом.

**Задание 9.** Найдите значение выражения . (5057)

Задание 9 проверяло знание тригонометрических формул (двойного угла и формул приведения) и умение корректно их применить.

Выполнение – 52,75% участников, что несколько ниже, чем в 2020 году (55,79%). Факты, связанные с тригонометрическими функциями, школьники усвоили не лучшим образом.

В группе участников, не преодолевших минимальный порог, процент выполнения этого задания 6,47%, в группе 81-100 т.б. – 97,79%.

**Задание 11.** На изготовление 540 деталей первый рабочий затрачивает на 12 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий? (4095)

Выполнение в 2021 году – 50,14% (в 2020 году – 66,43%). Задание 11 является стандартной задачей на составление уравнений из курса алгебры. Для участников экзамена 2021 года данное задание оказалось более сложным, чем аналогичное задание 2020 года.

В группе не преодолевших минимальный порог процент выполнения этого задания 3,24%, в группе 81-100 т.б. выполнение – 95,03%.

На протяжении последних трёх лет наблюдается отрицательная динамика в среднем показателе выполнения задания этого задания.

**Задание 12.** Найдите точку максимума функции . (5041)

Выполнение в 2021 году – 61,68%, что существенно больше, чем в 2020 – 47,68%.

Задача состоит в исследовании функции по известному алгоритму, включает в себя решение рационального уравнения. Наиболее частые ошибки возникают на этапе дифференцирования. В задаче 2020 года приходилось дифференцировать произведение, а также находить производную показательной функции (нередко, ошибочно, при нахождении производной показательной функции школьники используют формулу производной степенной функции). В задаче 2021 года речь идёт о производной суммы и производной натурального логарифма. Эти действия у участников экзамена вызывают меньшие затруднения. Некоторые участники в ответе записали значение функции в точке максимума, а не саму точку максимума – невнимательное прочтение условия задачи привело к неправильному выводу.

В группе не преодолевших минимальный порог процент выполнения этого задания 5,04%, в группе 81-100 т.б. выполнение – 95,58%.

Задания повышенного уровня сложности 13 и 15 с развернутым ответом, проверяющие умение решать уравнения и неравенства, наиболее успешно решаемы среди заданий с развернутым ответом повышенного уровня сложности.

**Задание 13.** а) Решите уравнение

.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку .

В задании 13 требовалось найти общее решение тригонометрического уравнения и отобрать частные решения из заданного отрезка. Верное и обоснованное решение этой задачи оценивается в 2 балла.

Выполнение – 32,60% участников (в 2020 году – 28,76%).

В решении задания 13 были допущены следующие типичные для этой задачи ошибки:

– неверное применение формул тригонометрии (формулы двойного аргумента);

– неверная запись общего решения простейшего тригонометрического уравнения;

– неверный (необоснованный) отбор корней тригонометрического уравнения, принадлежащих указанному отрезку.

Следует отметить, что часто участники экзамена при решении пункта б) задания 13 выполняют отбор корней с помощью единичной окружности. При этом нередко не выполнены необходимые требования по оформлению решения в этом случае: на окружности должна быть чётко выделена дуга, которой принадлежат отобранные корни; обозначены начало и конец этой дуги; на дуге чётко выделены и надписаны точки, значениями, отвечающими рассматриваемому промежутку.

Ученикам полезно рассказать о других способах отбора корней (например, решение (двойных) неравенств, решение с «недолётом» и «перелётом», решение графическое (графики тригонометрических функций) и др.), которые для них могут оказаться более доступными.

В группе учащихся, не преодолевших минимальный порог, многие приступали к выполнению этого задания, но не смогли выполнить даже пункт а), процент выполнения этого задания – 0%. В группе 81-100 т.б. процент выполнения – 98,07%.

**Задание 15.** Решите неравенство

.

В задании 15 требовалось решить «комбинированное» неравенство, которое содержит показательную и рациональную функции. Верное решение этой задачи оценивается в 2 балла.

Выполнение – 16,01% участников (в 2020 году – 12,71%).

В решении задания 15 были допущены следующие типичные для этой задачи ошибки:

– неверное применение свойств степени;

– неверное решение рационального неравенства.

Часто встречаются решения, опирающиеся на метод обобщенных интервалов. При этом в таких решениях на разных этапах могут возникать небольшие замечания, а также записи школьника, требующие уточнения.

Ученикам, для качественного решения данного задания, необходимо в совершенстве освоить метод интервалов. Неплохо было бы рассказать о методе обобщённых интервал, сравнить данный метод с методом интервалов, подчёркивая некоторые важные тонкие отличия методов. Можно также учеников познакомить с методом рационализации. При этом важно обсудить обоснование данного метода.

В группе не преодолевших минимальный порог учащиеся чаще всего не приступали к выполнению этого задания, а приступившие не сумели выполнить задание, процент выполнения – 0%. В группе 81-100 т.б. процент выполнения – 92,54%.

**Задания высокого уровня сложности**

К заданиям высокого уровня сложности относились задания второй части 18 и 19 с развернутым ответом. Эти задания предназначены для конкурсного отбора в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов. Задания высокого уровня сложности – это задания не на применение одного метода решения, а на комбинацию различных методов.

Задание 18 традиционно содержит выражение с параметром. Для успешного выполнения этого задания необходим, кроме прочных математических знаний, также высокий уровень математической культуры, которая формируется на протяжении всего обучения математики в школе.

**Задание 18.** Найдите все значения параметра , при каждом из которых уравнение

имеет ровно два различных корня.

Максимальная оценка, которую может получить экзаменуемый – 4 балла.

Выполнение 1,22% участников (в 2020 году – 2,15%).

К решению задания приступают, как правило, учащиеся с достаточно хорошей подготовкой. Приводились решения, использующие как аналитический (чаще), так и графический (значительно реже) методы решения.

Можно предположить, что задача 2021 года оказалась для экзаменующихся сложнее, чем задача 2020 года. Многие решения либо не содержали необходимого ограничения, связанного с неотрицательностью подкоренного выражения, либо данное ограничение учитывалось с самыми разными логическими и/или вычислительными ошибками.

Задачам с параметром (параметрами) обычно на уроках математики уделяется мало внимания. При этом понимание сути проблемы должно формироваться постепенно, начиная с решения простейших (линейных квадратичных и т.д.) уравнений. Погружение в данную тему может начинаться, как минимум, с введением терминологии (к ней необходимо привыкнуть), используемой в данной теме.

В группе учащихся, не преодолевших минимальный порог, большинство не приступали к выполнению этого задания, а приступившие не сумели выполнить ни одного из пунктов задачи, процент выполнения – 0%. В группе 81-100 т.б. – 16,57%.

Задание 19, которое отличается от остальных заданий КИМ, требует нетривиального подхода в решении. Для успешного выполнения этого задания необходимо уметь осуществлять поиск решения, выбирая различные подходы из числа известных, модифицируя изученные методы.

**Задание 19.** На доске написаны три различных натуральных числа. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 2022?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 2021?

в) В тройке чисел первое число трёхзначное, а третье равно 2. Сколько существует таких троек?

Задание 19 максимально оценивается в 4 балла.

Выполнение 7,52% участников (в 2020 году – 2,07%).

В данном случае, если учитывать процент выполнения, то можно говорить о существенном прогрессе, однако в 2021 году предлагалась не самая трудная задача, решение которой кроме аналитического обоснования допускала рассуждения, связанные с простым полным перебором.

Экзаменующиеся охотно приступали к решению этой задачи, но в большинстве случаев не достигали полного успеха.

Задачи такого типа требуют элективного курса на протяжении всего времени изучения математики в общеобразовательной школе.

В группе не преодолевших минимальный порог выполнение этого задания – 0,75%. В группе 81-100 т.б. процент выполнения – 25,41%.

### Выводы об итогах анализа выполнения заданий, групп заданий:

Усвоение всех элементов содержания, умений и видов деятельности школьниками региона в целом можно считать достаточным, показатели выполнения заданий всех элементов содержания – удовлетворительными.

Достаточно усвоенными всеми школьниками региона в целом можно считать следующие элементы содержания / умений и видов деятельности:

1.1. Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма;

1.2. Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования;

1.3. Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции;

2.1. Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы;

2.2. Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод;

3.1. Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций;

5.1. Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры;

6.2. Описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.

Недостаточно усвоенными всеми школьниками региона в целом можно считать следующие элементы содержания / умений и видов деятельности:

3.3 Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции;

4.1. Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей);

4.2. Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы);

Особого внимания на протяжении многих последних лет требует элемент содержания «Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами».

Наблюдается существенное снижение процента выполнения заданий с развернутым ответом №№17, 18; повышение процента выполнения заданий с развернутым ответом №№15, 16, 19:

– №15 Типичная ошибка в решении: ученик, выполнив замену переменного, получает квадратное неравенство и, не решив данного неравенства до конца, делает обратную замену (и/или отбор корней) на этапе нахождения вспомогательного квадратного уравнения. Кроме того, многие школьники так и не научились корректно решать рациональные неравенства методом интервалов. Также, вероятно, имеются очень приблизительные представления об обобщённом методе интервалов и грамотном оформлении решения этим методом.

– №16. В сравнении с 2020 годом показатели выполнения задания выросли примерно в 3 раза. Связать это можно, скорее всего, с более простой задачей 2021 года. Можно сделать вывод о том, что лишь незначительный процент школьников усваивает материал по геометрии на хорошем уровне.

– №17 С одной стороны, задача 2021 года проще задачи 2020 года: нет необходимости выполнять преобразования в общем виде (возможна работа с конкретными числовыми значениями), с другой стороны, ровно эти же обстоятельства могли сыграть злую шутку, поскольку неверные вычисления приводили к неверной математической модели.

Задания по геометрии №14 (стереометрия) и №16 (планиметрия), а также задания №18 (задача с параметром) и №19 – задания повышенного и высокого уровня сложности с наименьшими процентами выполнения (с процентом выполнения ниже 15%):

– №18. В сравнении с 2020 годом показатели выполнения задания снизились более, чем в 1,5 раза. Многие неверные решения содержали неточные рассуждения, связанные с областью допустимых значений подкоренного выражения.

– №19. В сравнении с 2020 годом показатели выполнения задания выросли более, чем в 3,5 раза. Задача 2021 года оказалась проще, чем в 2020 году.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Обозначение  задания в работе | Проверяемые умения | Уровень сложности задания | Средний процент выполнения по региону в 2020 году | Средний процент выполнения по региону в 2021 году |
| 13 | Уметь решать уравнения и неравенства | П | 28,76 | 32,60 |
| 14 | Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | П | 2,89 | 2,61 |
| 15 | Уметь решать уравнения и неравенства | П | 12,71 | **16,01** |
| 16 | Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами | П | 1,1 | **3,37** |
| 17 | Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни | П | 24,76 | **19,04** |
| 18 | Уметь решать уравнения и неравенства | В | 2,15 | **1,22** |
| 19 | Уметь строить и исследовать простейшие математические модели | В | 2,07 | **7,52** |

Среди общих проблем следует отметить следующие:

1) отсутствие у большого числа выпускников устойчивых вычислительных навыков,

2) отсутствие у большого числа выпускников базовой логической культуры,

3) значительные пробелы в геометрии.

Таким образом, выявлен перечень элементов содержания / умений и видов деятельности, усвоение которых всеми школьниками региона в целом, школьниками с разным уровнем подготовки нельзя считать достаточным. Необходимо усиление методической и учебной работы по рассмотрению тематики программы по математике, задания в рамках которой вызывали затруднения у участников ЕГЭ. Основной проблемой математического образования остаётся низкая мотивация учащихся к изучению предмета.

## **Раздел 4. РЕКОМЕНДАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ СУБЪЕКТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

### Рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания предмета в субъекте Российской Федерации на основе выявленных типичных затруднений и ошибок

1. Анализ результатов выполнения заданий ЕГЭ профильного уровня в 2021 году по математике показывает, что участники экзамена допускают большое количество вычислительных ошибок. Таким образом, на протяжении всех лет обучения математике в школе необходимо регулярно проводить работу с учащимися по совершенствованию вычислительных навыков, уделяя особое внимание рациональным способам вычислений.

2. При подготовке учащихся к ЕГЭ необходимо большое внимание уделять навыкам самоконтроля и самопроверки выполненных заданий.

3. Нередкие ошибки в решении заданий вызваны неверным прочтением условия задания. На уроке математики необходимо уделять достаточно времени развитию умений верного прочтения и точным интерпретациям условия и вопроса задачи, а также умений математически корректно записывать решение задания.

4. У участников экзамена проверяются умение использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, а также умение строить и исследовать простейшие математические модели. Поэтому при подготовке к экзаменам необходимо большое внимание уделять изучению практической, жизненно важной математики. Учащиеся должны научиться применять полученные знания в практической деятельности, быть способными анализировать, сопоставлять, делать выводы и уметь пользоваться справочными материалами.

5. Большинство выпускников не смогли продемонстрировать навыки строгого и логичного доказательства геометрических утверждений, знаний свойств геометрических фигур и формул (задания №14 и №16). Необходимо продолжить работу над обучением школьников строгим доказательствам утверждений.

6. Необходимо регулярно проводить диагностические работы, направленные на установление уровня подготовки обучающихся по отдельным темам и планирование дальнейшей работы с обучающимися с учётом полученных результатов. Для организации целенаправленной подготовки выпускников к ЕГЭ проводить контрольные и самостоятельные работы, используя структуру КИМ ЕГЭ по математике и материалы открытого банка заданий ЕГЭ по математике. Для успешного прохождения ГИА необходим дифференцированный подход в обучении математики.

7. Необходимо ознакомить школьников с демонстрационным вариантом ЕГЭ 2022 года по математике, что позволит учащимся получить представление об уровне трудности и типах заданий предстоящей экзаменационной работы.

8. Администрациям школ необходимо обеспечить прохождение всеми учителями соответствующей подготовки и их участие в методических мероприятиях, проводимых в регионе. При организации подготовки к ЕГЭ в 2021 году следует в рамках методических семинаров и ФПК учителей математики проанализировать используемые учебники и УМК в разрезе результатов ЕГЭ. Целесообразно организовать сетевое взаимодействие между школами, продемонстрировавшими высокие результаты, и учебными заведениями с низкими результатами ЕГЭ.

9. Полезно родителей не только знакомить с текущей успеваемостью и результатами пробных испытаний их детей, но и своевременно информировать о нормативных документах по подготовке к ЕГЭ, самой процедуре проведения экзамена, а также методических рекомендациях и всевозможных доступных ресурсах.

10. Необходимым условием успешной подготовки обучающихся к ЕГЭ является освоение учителем материалов, публикуемых ФИПИ (демонстрационного варианта, кодификатора элементов содержания и кодификатора требований к уровню подготовки, спецификации КИМ по математике), изучение заданий открытого банка, их систематизация, выделение основных способов решения различных классов заданий.

11. Основной проблемой математического образования остаётся низкая мотивация учащихся к приобретению математических знаний. Органам управления образования, администрациям образовательных организаций, учителям необходимо усилить разъяснительную работу среди учащихся и родителей, направленную на популяризацию математического образования.

12. Большую роль в обучении математике в школе играет квалификация педагога. Органам управления образования, администрациям образовательных организаций необходимо вести систематическую работу по выращиванию новых педагогических кадров.

1. Вычисляется по формуле , где N – сумма первичных баллов, полученных всеми участниками группы за выполнение задания, n – количество участников в группе, m – максимальный первичный балл за задание. [↑](#footnote-ref-1)